

# Hamiltonsche Bahnen ohne Zerspaltungseigenschaft. Die Lösung einer Aufgabe von M.G. Krein.

VON SERGEJ A. CHOROŠAVIN

Keywords: Hamilton dynamical system, Ljapunov exponent, indefinite inner product, linear canonical transformation, Bogolubov transformation  
 2000 MSC. 37K40, 37K45, 47A10, 47A15, 47B37, 47B50

Email: sergius@pve.vsu.ru

## Abstract

Here we construct linear hamilton systems without usual dichotomy property. The Ljapunov spectra of these systems and the behaviour of trajectories are very complicated. The paper's subject refers to some problems of indefinite inner product methods in the stability theory of abstract dynamical equation solutions .

## 1 Einleitung

Man betrachte Bahnen irgendeines dynamischen linearen hamiltonschen Systems. Gibt es welche Bahnen, die vorgegebenes Wachstumsverhalten für  $t \rightarrow \pm\infty$  haben ? Diese Frage sowie die Frage, ob die entsprechenden Zerlegungen von beliebigen Bahnen vorhanden sind, diese beiden Fragen sind traditionell und immer noch zeitgemäß für Experten in Theorie von dynamischen Systeme. Noch mehr, wie man diese Fragen beantwortet, davon hängt die Gestalt und der Inhalt von vielen Seiten von der analytische Stabilitätstheorie ab.

Solange man sich mit einem linearen endlich-dimensionalen Hamiltonschen Systeme beschäftigt, hat man die wohlbekannte Antwort:

*Jede Bahn  $x(t)$  läßt sich auf folgende Weise darstellen:*

$$(*) \quad x(t) = x_1(t) + \dots + x_N(t)$$

wobei  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  die Bahnen des ursprünglichen Systems sind, die für  $t \rightarrow \infty$  das übliche exponentiellweise Wachstumsverhalten haben.

Insbesondere gilt

**Zerspaltungssatz 1.** *Beliebige Bahn  $x(t)$  wird folgendermaßen dargestellt:*

$$(**) \quad x(t) = x_-(t) + x_+(t); |x_{\pm}(t)| \leq P_{\pm}(t) \text{ für } t \rightarrow \pm\infty$$

( hier sind  $P_{\pm}$  gewisse Polynome und  $x_{\pm}$  sind geeignete Bahnen desselben dynamischen Systems ) .

Soweit ist alles einfach. **Wie steht es aber mit den Systemen, die unendlich-dimensional sind?**

Es ist dabei ersichtlich, daß die obige Zerspaltungseigenschaft umformuliert werden muß. Mindestens zwei Umformulierungen scheinen geeignet zu sein:

- 1) statt in (\*\*) eingetretenen Polynome habe man "nicht zu schnell wachsende" nämlich die "subexponentiellwachsende" Funktionen zu gestatten; dabei sprechen wir über die Zerspaltung von Bahnen und stellen wir die zugehörige **Existenzaufgabe** von solchen Bahnen;
- 2) statt die Menge von subexponentiellwachsenden Bahnen zu suchen, habe man diejenige invariante Teilräume des Propagators des Systems zu suchen, auf denen der Spectralradius dieses Propagators  $\leq 1$  sei; hierbei spricht man über die **Aufgabe von M.G. KREIN**.

Hier ist zu beachten, daß nicht nur die kontinuierliche “Zeit” (d.h.  $t \in \mathbf{R}$ ), sondern auch die diskrete “Zeit” (d.h.  $t \in \mathbf{Z}$ ) oder irgendeine andere abstrakte “Zeit” von Interesse ist: es geht jetzt um “die symplektischen Darstellungen einer Halbgruppe”.

Was die Phasenräume, daß heißt die Räume, worauf solche Darstellungen wirken, betrifft, muß man nicht nur reelle, sondern auch komplexe Räume betrachten. Es handelt sich um die “Darstellungen in Räumen mit indefiniten inneren Produkt” sowie um “J-unitäre und J-isometrische Darstellungen” u.ä. Im allgemeinen die Aussage “ $T$  ist  $J$ -unitär” bedeutet:

$$T^*JT = J = TJT^*; \quad J^* = J; \quad J^2 = I.$$

Zu erinnern ist an:

**Hilfssatz H1-1**  *$V$  sei ein auf einem Hilbertraum  $H$  definierter linearer beschränkter Operator, der ein beschränktes Inverses besitzt.*

*Dann ist der Operator  $V \oplus V^{*-1}$  (d.h. Hilbertsche direkte Summe des Operators  $V$  mit  $V^{*-1}$ )  $J$ -unitär in bezug auf  $J$ , der durch die folgende Formel erklärt ist:*

$$J : x \oplus y \mapsto y \oplus x \quad (x, y \in H)$$

*Setzt man statt obigem  $J$  einen so wirkenden Operator:*

$$\mathcal{J} : x \oplus y \mapsto y \oplus -x \quad (x, y \in H) \quad ,$$

*so erhält man, daß  $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$ ;  $\mathcal{J}^2 = -I$ , d.h.  $\mathcal{J}$  ein Operator von einer symplektischen Struktur ist; in diesem Falle ist der Operator  $V \oplus V^{*-1}$  ein symplektischer Automorphismus.  $\square$*

Wir werden die Konstruktion  $V \oplus V^{*-1}$  systematisch benutzen und schreiben dann:  $\hat{V} := V \oplus V^{*-1}$ .

Um die beiden obigen Aufgaben zu präzisieren, führen wir eine geeignete Definition ein.

### Definition D1-1

$$S_0(T) := \{x \in H \mid \|T^N x\| \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow +\infty\},$$

$$S(T) := \{x \in H \mid \exists C \geq 0 \forall N \geq 0 \quad \|T^N x\| \leq C\},$$

$$S_+(T) := \{x \in H \mid \forall a > 1 \exists C \geq 0 \forall N \geq 0 \quad \|T^N x\| \leq Ca^N\},$$

$$r(T) := \text{Spektralradius von } T.$$

**Bemerkung B1-1** *Ist  $T$  ein linearer beschränkter Operator und ist  $L$  ein  $T$ -invarianter Teilraum, so daß  $r(T|L) \leq c$ , so ist*

$$L \subset S_+(c^{-1}T)$$

### Bemerkung B1-2

$$S_x(T_1 \oplus T_2) = S_x(T_1) \oplus S_x(T_2);$$

*hier steht jeweils  $S_x$  für  $S_0$  oder  $S$  oder  $S_+$ .*

### Bemerkung B1-3

$$S_0(T) \perp S(T^{*-1}); \quad S(T) \perp S_0(T^{*-1})$$

*Dies folgt schon daraus, daß*

$$|(x, y)| = |(T^N x, T^{*-N} y)| \leq \|T^N x\| \|T^{*-N} y\|.$$

So besteht die erste Aufgabe darin, die Struktur von der Menge des Typs  $S_{\times}(T)$  zu erklären. Mindestens fragt man:

**Frage 1.**

*T sei beliebig ausgewählt, dieser sei aber symplektisch oder J-unitär .*

*Ist  $S_{+}(T) \neq \{0\}$  ?*

Die zweite Aufgabe sieht mehr klassisch aus: man suche diejenigen  $T$ -invarianten Teilräume, worauf die vorgegebene Begrenzung des Spektralradius erfüllt ist. Mindestens fragt man:

**Frage 2.**

*T sei beliebig ausgewählt, dieser sei aber symplektisch oder J-unitär .*

*Gibt es einen nicht trivialen T-invarianten Teilraum L, so daß  $r(T|L) \leq 1$  ?*

Diese beiden Fragen sind nicht voneinander unabhängig. Nämlich, wir haben (wegen Bemerkung **B1-1**): die negative Antwort auf die erste Frage zieht die negative Antwort auf die zweite Frage nach sich und die positive Antwort auf die zweite Frage hat zur Folge, daß die Antwort auf die erste Frage ebenfalls positiv ist.

Obwohl die beiden obigen Aufgaben vor langem bekannt sind (siehe z.B. [Kre64], [Kre65], [DalKre]), ist die ‘allgemeine’ Lösung noch immer nicht bekommen. Selbst die Antwort auf die Fragen 1 und 2 zu finden, das ist erst vor kurzem gelungen. Diese Antwort basiert auf [Ch97], [Ch98]; sie wird hier vorgestellt.

Man fragt sich zuletzt, ob diese hier erörterten Aufgaben einigermaßen beachtenswert sind.

Herkunft ist mir nicht ganz klar. Ich glaube, die Geschichte dieser Aufgaben begann am mindesten seit der Zeit, als man den Begriff von Ljapunovschem Index <sup>1</sup> eingeführt hatte und lineare Hamiltonsche Gleichungen als ein einzelnen merklichen Gegenstand betrachtet.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, daß die Ljapunovschen Indizes von einer vorgegebenen Bahn  $x(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  ( eines linearen dynamischen Systems) reelle Zahlen  $\lambda_{\pm}$  sind, die durch

$$\lambda_{\pm} := \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{|t|} = \inf\{\lambda \mid \|x(t)\| \leq C_{\lambda} e^{\lambda|t|} (t \rightarrow \pm\infty)\}$$

definiert werden.

So betreffen die oben formulierten Probleme die zugehörige Theorie von Ljapunovschem Spektrum, den man manchmal auch Floquet-Spektrum nennt.

Die erste Spur von volliger Systematisierung und mithin von einer Einführung von Kanonischen Formen (von endlich-dimensionalen) Hamiltonianen, habe ich in [Arn] als sogenannten Williamsonssatz gefunden (originelle Werke sind [Will36] und [Will37]).

Man beachte: dieser Satz ist in Rahmen von reellen Räumen formuliert.

Es ist kaum möglich, exakt und bestimmt zu erkennen, wer der Erster war, der den Phasenraum des linearen Systems formalweise komplexifiziert hatte, und statt der symplektischen Struktur ( $\mathcal{J}^2 = -I$ ) die Kreinsche  $J$ -Struktur ( $J^2 = I$ ) eingeführt hatte.

Wie dem auch sei, solcher Trick fand sich so gelungen [Kre65], [KL1], [KL2], [IK], [IKL], [DalKre], [DadKul], [Kul], [Ikr89], daß der besondere Zweig von der Theorie der linearen Räume und Operatoren—die Theorie von Krein-Räume— entstand [Bogn], [DR]. <sup>2</sup>

Der andere Zweig von Entwicklung solchartiger Theorien hängt mit solchen Begriffen zusammen, wie *lineare kanonische Transformation, kanonische Vertauschungsbeziehungen*, alias *CCR (Canonical Commutation Relations)*, *Bogoliubov Transformationen quasifreie Bewegung* [Bog], [BraRob], [Ber], [Rob], [MV], [Emch], [RS2],

<sup>1</sup>man nennt diese Größe auch oberen Wachstumsindex oder Ljapunovsexponent

<sup>2</sup>Man nennt Krein-Räume auch "Räume mit regulärem innerem Produkte"

[RS3], [Oks], [DadKul], [Kul], [Ikr89]. Die soeben erwähnten Begriffe gehören eher zu der Quanten Physik, als zu der reinen Mathematik und, obwohl die vorliegende Arbeit vorerst gerade aus diesem Zweig hervorgeht [Ch81], [Ch83], [Ch83T], [Ch84], [ChDTh], wollen wir auf diese Begriffe nicht eingehen, weil hier nur "rein mathematischer" Teil von unseren Untersuchungen dargestellt worden wird.

Wir sollen noch ein Thema nennen, nämlich "Modelle von chaotischem Verhalten", oder einfach "Modelle von Chaos".

Eine verbreitete Überzeugung ist, daß kein lineares System zu Modellierung des Chaos paßt und geeignet ist. Diese Überzeugung ist verbreitet, aber umstritten. Hier meinen wir vorerst "Does quantum chaos exist? (A quantum Lyapunov exponents approach.)" von Wladyslaw Adam Majewski. Wir vertreten einen verwandten Standpunkt und suchen explizite Beispiele von linearen 'chaotischen' Systemen zu konstruieren.

In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir drei linearen diskreten dynamischen Systeme (jeweilige Operatoren  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$  in der Sektionen 2, 3, ) und beschreiben kurz ihre kontinuierlichen Analoga (Sektion 4), die ein sehr kompliziertes Verhalten haben.

Es ist natürlich kaum so, daß man diese Systeme als vollkommen chaotische Systeme qualifizieren wolle.

Dennoch sehen ihre Ljapunov Spekren sehr exotisch aus, und entsprechen die spektrale Teilräume und die Mengen  $S_0, S, S_+$  einander etwas seltsam und überraschend. Von diesem Standpunkte aus, wir würden sagen, das Verhalten dieser Systeme ist **vorchotisch**. Die Situation ist im großen und ganzen diese:

Das erste System, das wir konstruieren, ist ein solches, daß  $S_+$  ein bloßes Nullelement enthält. Folglich, alle Ljapunov Indizes sind streng positiv. Noch mehr, wählt man eine Zahl  $c > 1$  ganz beliebig, so kann man ein System konstruieren, so daß **alle** Ljapunov Indizes  $> \ln c$ . Demungeachtet gibt es von Null verschiedene Bahnen, so daß der **untere** Wachstumsindex  $\leq -\ln c$  ist.

Für den Fall des zweiten Systems ist die Menge  $S_+$  "reich": es gibt "viele" Bahnen, deren Ljapunov Indizes streng negativ sind ( $< -\ln 2 - \ln c, c > 1$ ), dann aber hat die Abschließung dieser Menge gewisse Bahnen, deren Indizes streng positiv sind ( $\geq \ln 2 + \ln c$ ).

Was das dritte System betrifft, dieses ist, daß  $S_0$  auch von Null verschieden ist (natürlich,  $S_0 \subset S \subset S_+$ ), sowie ein gesuchter Teilraum existiert, — ein **maximaler** invarianter Teilraum  $L$  derart, daß  $r(\hat{W}|L) = 1$  (folglich,  $L \subset S_+$ ). Doch sind diese,  $L$  und  $S_0$ , zueinander orthogonal und außerdem  $L \cap \overline{S} = \{0\}$ .

Noch mehr,  $L = S_0^\perp$ , sogar  $L = S^\perp$ . Noch mehr, der Spektralradius des auf  $L^\perp \equiv \overline{S_0}$  eingeschränkten Propagators ist gleich 2; das Spektrum der Einschränkung selbst liegt in der Menge  $\{z | 1 \leq |z| \leq 2\}$ .

Soweit sind unsere Ergebnisse, die die Frage 1 betreffen.

Was die Frage 2 selbst betrifft, die lange Zeit existierte die Ahnung, daß die Antwort allemal positiv ist. Diese Ahnung unterstützten Ergebnisse von verschiedener Art, sowohl einzelnen Existenzsätze — von [Kre64] bis [Shk99]—, als auch die Theoreme von der Art — "Die Menge  $S_0(T)$  liegt in dem Teilraum, der M.G.Krein konstruiert hat [Kre64], [Kre65]" (darüber sieh [Ch89-1], [Ch89-2], [Ch96T], [Ch00]).

Nun gehen wir eigentlich zur Grunddarlegung selbst über. Dabei entspricht die sogenannte '*J*-Terminologie' der Arbeit [Kre65], während die allgemeine mathematische Terminologie auf [RS] folgt.

## 2 Diskretes dynamisches System ohne Dichotomie

**Satz S2-1** *Wie auch eine positive Zahl  $c > 0$  ausgewählt sein mag, es gibt einen  $J$ -unitären und symplektischen Operator  $\mathcal{U}$ , daß*

$$S_+(c^{-1}\mathcal{U}) = S_+(c^{-1}\mathcal{U}^{-1}) = \{0\}.$$

*Insbesondere,*

- (i)  $L$  sei ein von Null verschiedener  $\mathcal{U}$ -invarianter Teilraum. Dann ist  $r(\mathcal{U}|L) > c$ ;
- (ii)  $L'$  sei ein von Null verschiedener  $\mathcal{U}^{-1}$ -invarianter Teilraum. Dann ist  $r(\mathcal{U}^{-1}|L') > c$ ;
- (iii) es gibt keinen  $\mathcal{U}$ -invarianten Teilraum  $L''$ , so daß  $|\text{spectrum}(\mathcal{U}|L'')| \geq c^{-1}$ .

BEWEIS

Angenommen, es existiere ein Operator  $U$  derart, daß gilt:

- 1)  $U$  ist linear, bijektiv, beschränkt;<sup>3</sup>
- 2)  $S_+(c^{-1}U) = S_+(c^{-1}U^{*-1}) = S_+(c^{-1}U^{-1}) = S_+(c^{-1}U^*) = \{0\}$ .

Ist solch ein Operator  $U$  gegeben, so setzen wir  $\mathcal{U} := \hat{U} = U \oplus U^{*-1}$ .

Dann gilt:

- a)  $S_+(c^{-1}\mathcal{U}) = S_+(c^{-1}\mathcal{U}^{-1}) = \{0\}$  (nach Bemerkung **B1-2**);
- b)  $\mathcal{U}$  ist  $J$ -unitär und symplektisch (nach Hilfssatz **H1-1**);
- c) Die Punkte (i), (ii), (iii) sind erfüllt (nach Bemerkung **B1-1**).

Nun haben wir jenen  $U$  zu konstruieren. Das wollen wir im Hilfssatz **H2-1** tun, erst aber müssen wir an gewisse Definitionen und Tatsachen der Theorie von sogenannten gewichteten Verschiebungsoperatoren erinnern.

**Definition D2-1**  $H_0$  sei ein beliebiger separabler (reeller oder komplexer) Hilbertraum; das Symbol  $(\cdot, \cdot)$  stehe für das Skalarprodukt von  $H_0$  und mit  $\{b_n\}_n$  bezeichne man eine orthonormierte Basis, deren Elemente durch  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  indiziert werden.

Es sei  $\{u_n\}_n, n \in \mathbf{Z}$  eine zweiseitige Zahlenfolge; dabei wird  $u_n \neq 0, n \in \mathbf{Z}$  angenommen. Nun bezeichne  $U$  einen Verschiebungsoperator<sup>4</sup>, der durch die Formel

$$U : b_n \mapsto \frac{u_{n+1}}{u_n} b_{n+1} \quad (*)$$

erzeugt wird.

### Observation O2-1

Es kann vielleicht nicht fehlen, auf die Definition von  $U$  einzugehen. Man bildet den Operator  $U$  so:

Vorerst setzt man die Zuordnungsvorschrift  $(*)$  auf ganze lineare Hülle von den Basiselementen  $\{b_n\}_n \in \mathbf{Z}$  zu einem linearen Operator fort. Diese Fortsetzung ist eindeutig und erzeugt einen linearen dicht definierten abschließbaren Operator, der hier mit  $U_{\min}$  bezeichnet wird. Die Abschließung von  $U_{\min}$  ist genau der Operator  $U$ .

Also, der hierdurch definierte Operator  $U$  ist abgeschlossen, mindestens dicht definiert, injektiv, besitzt dichtes Bild und die Wirkung von  $U^N, U^{*-N}, U^{*N}U^N, U^{-N}U^{*-N}$  (für alle ganzen  $N$ ) wird durch die Formeln

$$U^N : b_n \mapsto \frac{u_{n+N}}{u_n} b_{n+N}; \quad U^{*-N} : b_n \mapsto \frac{u_n^*}{u_{n+N}^*} b_{n+N};$$

<sup>3</sup>daraus folgt, daß  $U^*, U^{-1}, U^{*-1}$  beschränkt sind

<sup>4</sup>voller Name: gewichteter Verschiebungsoperator, von  $\{b_n\}_n$ , nach rechts.

$$U^{*N}U^N : b_n \mapsto \left| \frac{u_{n+N}}{u_n} \right|^2 b_n ; U^{-N}U^{*-N} : b_n \mapsto \left| \frac{u_n}{u_{n+N}} \right|^2 b_n ;$$

erzeugt.

Insbesondere ist  $U^N$  beschränkt genau dann, wenn die Zahlenfolge  $\{|u_{n+N}/u_n|\}_n$  beschränkt ist.  $\square$

**Observation O2-2** Die Schar  $\{b_n\}_n$  ist eine orthonormierte Basis und es gilt auch  $U^N b_n \perp U^N b_m$  für  $n \neq m$ . Deshalb ist

$$\|U^N f\|^2 = \sum_n |(b_n, f)|^2 \|U^N b_n\|^2 = \sum_n |(b_n, f)|^2 \left| \frac{u_{n+N}}{u_n} \right|^2$$

für jede  $f \in D_{U^N}$ .

Insbesondere

$$\|U^N f\| \geq |(b_n, f)| |u_{n+N}/u_n|$$

für alle ganzen  $n$ . Daraus folgt:

Ist  $f \in H_0 \setminus \{0\}$  und sind  $M, a$  gewisse Zahlen, so daß

$$\|U^N f\| \leq M a^N \text{ für } N = 0, 1, 2, \dots,$$

dann gibt es eine Zahl  $M'$ , so daß

$$|u_N| \leq M' a^N \text{ für } N = 0, 1, 2, \dots$$

Für  $U^{*-1}, U^{-1}, U^*$ , es gelten die analogen Implikationen. Wir schreiben alle diese Implikationen ausführlich heraus:

$$\begin{array}{llll} \|U^N f\| & \leq & M a^N & \Rightarrow \quad |u_N| \leq M' a^N \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \\ \|U^{*-N} f\| & \leq & M a^N & \Rightarrow \quad |u_N|^{-1} \leq M' a^N \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \\ \|U^{-N} f\| & \leq & M a^N & \Rightarrow \quad |u_{-N}| \leq M' a^N \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \\ \|U^{*N} f\| & \leq & M a^N & \Rightarrow \quad |u_{-N}|^{-1} \leq M' a^N \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \end{array}$$

(Wir haben hier bei den Bezeichnungen das Format

$$\exists f \in H_0 \setminus \{0\}, M > 0, a > 0 \forall N \geq 0 \quad \dots \Rightarrow \quad \exists M' > 0 \forall N \geq 0 \quad \dots$$

gemeint.) Am nächsten Hilfssatz werden wir nämlich solche Folgerungen dieser obigen Implikationen anwenden:

Es stehe  $c$  für eine reelle positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} S_+(c^{-1}U) \neq \{0\} & \Rightarrow & \exists M' > 0 \forall N \geq 0 & |u_N| \leq M'(c+1)^N \\ S_+(c^{-1}U^{*-1}) \neq \{0\} & \Rightarrow & \exists M' > 0 \forall N \geq 0 & |u_N|^{-1} \leq M'(c+1)^N \\ S_+(c^{-1}U^{-1}) \neq \{0\} & \Rightarrow & \exists M' > 0 \forall N \geq 0 & |u_{-N}| \leq M'(c+1)^N \\ S_+(c^{-1}U^*) \neq \{0\} & \Rightarrow & \exists M' > 0 \forall N \geq 0 & |u_{-N}|^{-1} \leq M'(c+1)^N \end{array}$$

$\square$

**Hilfssatz H2-1** Man setze

$$u_n := (c+2)^{|n| \sin(\frac{\pi}{2} \log_2(1+|n|))} \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

hierbei sei  $c > 0$  beliebig ausgewählt.

Dann ist der entsprechende Verschiebungsoperator  $U$  mit seinem Inverse beschränkt, und

$$S_+(c^{-1}U) = S_+(c^{-1}U^{*-1}) = S_+(c^{-1}U^{-1}) = S_+(c^{-1}U^*) = \{0\}$$

BEWEIS Die Ableitung der zahlenwertigen Funktion

$$x \mapsto |x| \sin\left(\frac{\pi}{2} \log_2(1 + |x|)\right)$$

ist gleich

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \log_2(1 + |x|)\right) + \frac{\pi}{2 \ln 2} \frac{|x|}{1 + |x|} \cos\left(\frac{\pi}{2} \log_2(1 + |x|)\right)\right) \operatorname{sgn} x$$

und ihr Absolutbetrag übersteigt der Größe  $\alpha := 1 + \pi/(2 \ln 2)$  nicht. Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange ist

$$(c + 2)^{-\alpha} \leq |u_{n+1}/u_n| \leq (c + 2)^\alpha.$$

Somit sind die Operatoren  $U$  und  $U^{-1}$  beschränkt.

Nun wählen wir zwei Zahlenfolge so aus:

$$n_k := 2^{1+4k} - 1; \quad m_k := 2^{3+4k} - 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dann gilt:  $n_k, m_k \in \mathbf{N}$ ,  $n_k \rightarrow +\infty, m_k \rightarrow +\infty$  (für  $k \rightarrow +\infty$ ), und gleichzeitig

$$u_{n_k} = u_{-n_k} = (c + 2)^{n_k}; \quad u_{m_k}^{-1} = u_{-m_k}^{-1} = (c + 2)^{m_k}.$$

Man sieht, daß man keine Abschätzung von der Art

$$\begin{aligned} |u_N| &\leq M'(c + 1)^N, & |u_{-N}| &\leq M'(c + 1)^N, & |u_N|^{-1} &\leq M'(c + 1)^N, \\ & & |u_{-N}|^{-1} &\leq M'(c + 1)^N \end{aligned}$$

(für  $N = 0, 1, \dots$ ) verwirklichen kann. Wendet man hier die Observation **O2-2** an, so bekommt man, daß

$$S_+(c^{-1}U) = \{0\}, S_+(c^{-1}U^{-1}) = \{0\}, S_+(c^{-1}U^{*-1}) = \{0\}, S_+(c^{-1}U^*) = \{0\};$$

was zu beweisen war. □

Der Beweis des Hilfssatzes **H2-1** und mithin des Satzes **S2-1** ist beendet. □

### 3 Andere Beispiele von $J$ -unitären Operatoren

In dieser Sektion zeigen wir noch zwei Operatoren, deren Eigenschaften irgendwie absonderlich aussehen. Die allgemeine Elemente von der Konstruktionen sind dieselbe, die wir in den vorigen Sektionen eingeführt haben:

$H_0$ , das steht für ein beliebiger separabler Hilbertraum;  $\{b_n\}_n$ , das steht für eine orthonormierte Basis von  $H_0$ , die Elemente von dieser Basis werden durch  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  indexiert; außerdem

$$H := H_0 \oplus H_0, \quad J(x \oplus y) := y \oplus x, \quad \mathcal{J}(x \oplus y) := -y \oplus x, \quad (x, y \in H_0)$$

und ist  $T : H_0 \rightarrow H_0$  ein linearer Operator, dann setzen wir  $\hat{T} := T \oplus T^{*-1}$ , falls aber  $T^{*-1}$  existiert.

Wir konstruieren zwei zweiseitige Zahlenfolgen  $\{v_n\}_n, \{w_n\}_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , so daß die entsprechenden Verschiebungsoperatoren,  $V$  und  $W$ , und die  $J$ -unitären und symplektischen Operatoren,  $\hat{V}$  und  $\hat{W}$ , bemerkliche Eigenschaften haben.

**Definition D3-1** *Es sei eine Zahl  $c \geq 1$  beliebig ausgewählt. Es sei  $v_n := (2c)^{-|n|}$  für beliebige ganze  $n$ .  $V : H \rightarrow H$  sei der entsprechende, durch die Formeln*

$$V : b_n \mapsto \frac{v_{n+1}}{v_n} b_{n+1}$$

erzeugte Verschiebungsoperator. Mit anderen Worten, es sei

$$Vb_n := \frac{1}{2c} b_{n+1} \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots \quad Vb_n := 2cb_{n+1} \text{ für } n = \dots, -2, -1.$$

**Bemerkung B3-1** *Der hierdurch definierte Operator  $V$  ist beschränkt und besitzt ein beschränktes Inverses; nach seiner Definition kann man zeigen, daß*

- (1)  $\|V^N b_n\| = (2c)^{-|n+N|+|n|}$  für beliebige ganze  $n, N$ ;
- (2)  $r(V) = r(V^{-1}) = 2c$ ;
- (3)  $\overline{S_0\left(\frac{2c}{2}V\right)} = H, S_0\left(\frac{2c}{3c}V^{*-1}\right) = \{0\}, \overline{S_0\left(\frac{2c}{3c}V^{-1}\right)} = H, S_0\left(\frac{2c}{3c}V^*\right) = \{0\}.$

**Hilfssatz H3-1**  *$L, M$  seien solche (in  $\hat{H}$  lineare abgeschlossene) Teilräume, daß*

$$\hat{V}L = L, \quad |\text{spectrum } \hat{V}|L| \leq c, \hat{V}^{-1}M = M, \quad |\text{spectrum } \hat{V}^{-1}|M| \leq c.$$

Dann gilt:

- (a)  $L = L_1 \oplus \{0\}, \quad M = M_1 \oplus \{0\},$  für gewisse  $L_1 \subset H; M_1 \subset H$ ;
- (b)  $VL_1 = L_1, |\text{spectrum } V|L_1| \leq c;$   
 $V^{-1}M_1 = M_1, |\text{spectrum } V^{-1}|M_1| \leq c;$
- (c)  $L_1 \neq H, \quad M_1 \neq H.$

BEWEIS

Beweis von (a) : Dies folgt daraus, daß

$$\begin{aligned} L \subset S_0\left(\frac{2}{3c}\hat{V}\right) &= S_0\left(\frac{2}{3c}V \oplus \frac{2}{3c}V^{*-1}\right) \\ &= S_0\left(\frac{2}{3c}V\right) \oplus S_0\left(\frac{2}{3c}V^{*-1}\right) = S_0\left(\frac{2}{3c}V\right) \oplus \{0\}; \\ M \subset S_0\left(\frac{2}{3c}\hat{V}^{-1}\right) &= S_0\left(\frac{2}{3c}V^{-1} \oplus \frac{2}{3c}V^*\right) \\ &= S_0\left(\frac{2}{3c}V^{-1}\right) \oplus S_0\left(\frac{2}{3c}V^*\right) = S_0\left(\frac{2}{3c}V^{-1}\right) \oplus \{0\}; \end{aligned}$$



Beweis von (b): Nach dem Beweis von (a) haben wir:

$$L = L_1 \oplus \{0\}, \quad M = M_1 \oplus \{0\}, \quad \hat{V} = V \oplus V^{*-1}.$$

Folglich

$$\text{spectrum } \hat{V}|L = \text{spectrum } V|L_1, \quad \text{spectrum } \hat{V}^{-1}|M = \text{spectrum } V^{-1}|M_1,$$

und demnach

$$|\text{spectrum } V|L_1| = |\text{spectrum } \hat{V}|L| \leq c,$$

$$|\text{spectrum } V^{-1}|M_1| = |\text{spectrum } \hat{V}^{-1}|M| \leq c.$$

Beweis von (c) : Wir haben

$$|\text{spectrum } V|L_1| \leq c, \text{ und } r(V) = 2c. \text{ Folglich } L_1 \neq H. \text{ Analog, } |\text{spectrum } V^{-1}|M_1| \leq c, \text{ und } r(V^{-1}) = 2c. \text{ Folglich } M_1 \neq H.$$

□

Nun erinnern wir daran, daß  $H \oplus \{0\}$  ein in  $\hat{H}$   $J$ -neutraler Teilraum ist (sieh [Krein65]). Insbesondere ist  $H \oplus \{0\}$  ein semidefiniter Teilraum.

Dann erhaltet man den folgenden

**Satz S3-1** *Es sei  $L$  ein solcher semidefiniter Teilraum von  $\hat{H}$ , daß*

$$\hat{V}L = L, \quad |\text{spectrum } \hat{V}|L| \leq c.$$

*Dann ist  $L$  nicht maximal.*

*Es sei  $M$  ein solcher semidefiniter Teilraum von  $\hat{H}$ , daß*

$$\hat{V}^{-1}M = M, \quad |\text{spectrum } \hat{V}^{-1}|M| \leq c.$$

*Dann ist  $M$  nicht maximal.*

### Bemerkung B3-2

*Der Operator  $V$  besitzt die folgende interessante Eigenschaft:*

*$b_n \in S_0(V) \cap S_0(V^{-1})$  für jede ganze  $n$ ; somit ist  $S_0(V) \cap S_0(V^{-1})$  in  $H$  dicht. Noch mehr,  $L_k$  bezeichne abgeschlossene lineare Hülle der Menge  $\{V^s b_k | s \geq k\}$ . Dann ist*

$$VL_k \subset L_k, \quad r(V|L_k) \leq 1/2c \quad \text{und} \quad H = \overline{\cup \{L_k | k = \dots -1, 0, 1, \dots\}}.$$

*aber  $r(V) = 2c$ .*

*Der Operator  $V^{-1}$  besitzt die ähnliche Eigenschaft. Hier ist  $L_k$  aber durch abgeschlossene lineare Hülle von  $\{V^{-s} b_k | s \geq k\}$  zu ersetzen.*

*Wir wollen noch eine Eigenschaft von  $V$  anmerken.*

*Es sei  $f := \sum_{n \neq 0} |n|^{-1} b_n$ . Dann  $f \in H_0$  und*

$$\begin{aligned} \|V^N f\|^2 &= \sum_n |(b_n, f)|^2 \left| \frac{v_{n+N}}{v_n} \right|^2 \\ &= \sum_{n>0} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2|n+N|}}{(2c)^{-2|n|}} + \sum_{n<0} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2|n+N|}}{(2c)^{-2|n|}} \\ &= \sum_{n>0} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2|n+N|}}{(2c)^{-2|n|}} + \sum_{n>0} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2|n-N|}}{(2c)^{-2|n|}} \end{aligned}$$

*Wir wollen die Folge  $\|V^N f\|^2$  nach unten abschätzen.*

Zuerst sei  $N \geq 0$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|V^N f\|^2 &\geq + \sum_{n>N} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2|n-N|}}{(2c)^{-2|n|}} \\
&= \sum_{n>N} \frac{1}{|n|^2} \frac{(2c)^{-2n+2N}}{(2c)^{-2n}} \\
&= \sum_{n>N} \frac{1}{|n|^2} (2c)^{2N} \\
&\geq \frac{1}{N+1} (2c)^{2N} \geq \frac{1}{2^N} (2c)^{2N} = 2^N c^{2N} = 2^{|N|} c^{2|N|}.
\end{aligned}$$

Überdies sehen wir, daß für die jetzt zu betrachtenden  $V$  und  $f$  die Größe  $\|V^N f\|^2$  von  $N$  so abhängt, daß  $\|V^N f\|^2 = \|V^{-N} f\|^2$  für alle  $N$  ist.

Somit sehen wir, daß

$$\|V^N f\|^2 \geq \frac{1}{|N|+1} (2c)^{2N} \geq 2^{|N|} c^{2|N|} \text{ für alle } N.$$

Ein sehr schnelles Wachstum von  $\|V^N f\|^2$ , wenn  $N \rightarrow \pm\infty$  !!

Jetzt zeigen wir noch einen Beispiel von  $J$ -unitärem und symplektischem Operator.

**Definition D3-4** Es sei  $w_n := 2^{-|n|} = 2^n$  für  $n \leq 0$  und  $w_n := 1/(n+1)$  für  $n > 0$ .  $W : H \rightarrow H$  sei der entsprechende, durch die Formeln

$$W : b_n \mapsto \frac{w_{n+1}}{w_n} b_{n+1}$$

erzeugte Verschiebungsoperator

**Bemerkung B3-3** Da  $1/2 \leq w_{n+1}/w_n \leq 2$  für alle Ganzen  $n$  ist, ist der Operator  $W$  beschränkt, invertierbar und  $W^{-1}$  ist beschränkt auch.

**Hilfssatz H3-2** Der soeben definierte Operator  $W$  hat die Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\overline{S_0(W)} &= H, \quad 1 \leq |\text{spectrum } W| \leq 2, \quad r(W) = 2, \\
S(W^{*-1}) &= \{0\}, \quad \frac{1}{2} \leq |\text{spectrum } W^{*-1}| \leq 1, \quad r(W^{*-1}) = 1.
\end{aligned}$$

BEWEIS. Der Beweis stützt sich auf die wohlbekannte Spektralradiusformel, auf die Bemerkung **B3-3** und auf die Formeln der Observation **O2-1**. Wir haben:

$$\|W^N\| = \sup\left\{\frac{w_{n+N}}{w_n} \mid n = \dots - 1, 0, 1, \dots\right\},$$

$$\|W^{*-N}\| = \sup\left\{\frac{w_n}{w_{n+N}} \mid n = \dots - 1, 0, 1, \dots\right\}.$$

Nehmen wir  $N > 0$  an, und betrachten den Ausdruck  $w_n/w_{n+N}$  im einzelnen. Wir sehen:

a)  $w_n/w_{n+N} = 1/2^N$  für  $n + N \leq 0$ ;

b)  $w_n/w_{n+N} = (1 + n + N)/(1 + n) = N/(n + 1) + 1 \leq N + 1$  für  $0 < n$ ;

c)  $w_n/w_{n+N} = 2^n(1 + n + N) \leq N + 1$  für  $n \leq 0 < N + n$

Außerdem ist  $w_0/w_N = 1 + N$ . Folglich ist  $\|W^{*-N}\| = N + 1$  (für  $N > 0$ ), daraus  $r(W^{*-1}) = 1$  und  $r(W^{-1}) = 1$ . Ganz analog ergibt sich, daß  $\|W^N\| = 2^N$  (für  $N > 0$ ), daraus  $r(W) = 2$  und  $r(W^*) = 2$ .

Zuletzt, ist  $n + N > 0$ , so ist  $W^N b_n = w_n^{-1} (1 + N + n)^{-1} b_{n+N}$ . Daraus folgt, daß  $b_n \in S_0(W)$  für alle ganzen Zahlen  $n$ . Folglich ist  $S_0(W) = H$  und  $S(W^{*-1}) = \{0\}$ .  $\square$

### Satz S3-2

*Es gibt einen  $J$ -unitären Operator  $\hat{W}$  und einen maximalen semidefiniten Teilraum  $L$ , so daß gilt:*

- (a)  $\hat{W}L^\perp = L^\perp$ ,  $1 \leq |\text{spectrum} \hat{W}|_{L^\perp}| \leq 2$ ,  $r(\hat{W}|_{L^\perp}) = 2$   
trotzdem ist  $L^\perp = \overline{S_0(\hat{W})} = \overline{S(\hat{W})}$ .
- (b)  $\hat{W}L = L$ ,  $|\text{spectrum} \hat{W}|_L| \leq 1$ ,  
jedoch ist  $L \cap \overline{S(\hat{W})} = \{0\}$ .

BEWEIS Man setze

$$L := \{0\} \oplus H, \quad M := H \oplus \{0\} \equiv L^\perp,$$

und wende den nun bewiesene Hilfssatz **H3-2** auf die Formeln für  $S_0(\hat{W})$  und  $S(\hat{W})$  (siehe Einleitung) an:

$$S_0(\hat{W}) = S_0(W) \oplus S_0(W^{*-1}) = S_0(W) \oplus \{0\} \subset M$$

$$S(\hat{W}) = S(W) \oplus S(W^{*-1}) = S(W) \oplus \{0\} \subset M$$

Die Mengen  $S_0(W)$  und  $S(W)$  beide sind aber in  $H$  dicht. Folglich fallen ihre Abschließungen mit  $M$  zusammen. Um Beweis zu vollenden, ist es hinreichend anzumerken: der Operator  $\hat{W}|_M$  ist zu  $W$  unitär äquivalent, der Operator  $\hat{W}|_L$  ist zu  $W^{*-1}$  unitär äquivalent, und danach nochmals den Hilfssatz **H3-2** anzuwenden.  $\square$

## 4 Ein Übergang zu einem kontinuierlichen Modell

Dieser Übergang wird mit solchen wohl üblichen Schritten erfüllt:

$$\begin{aligned} V^N : b_n &\mapsto \frac{v_{n+N}}{v_n} b_{n+N} \\ V^N : \sum_n f(n) b_n &\mapsto \sum_n \frac{v_{n+N}}{v_n} f(n) b_{n+N} = \sum_n \frac{v_n}{v_{n-N}} f(n-N) b_n ; \\ V^N : f(n) &\mapsto \frac{v_n}{v_{n-N}} f(n-N) \\ V(t) : f(x) &\mapsto \frac{v(x)}{v(x-t)} f(x-t) \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} V(t)V(\tau)^{-1} : \\ f(x) &\xrightarrow{V(\tau)^{-1}} \frac{v(x)}{v(x+\tau)} f(x+\tau) \xrightarrow{V(t)} \frac{v(x)}{v(x-t)} \frac{v(x-t)}{v(x-t+\tau)} f(x-t+\tau) \\ &= (V(t-\tau)f)(x) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist die durch  $V$  erzeugte Dynamik Zeit-autonom und formaler Generator sieht so aus:

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &= (V(t)f)'_{t=0}(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{v(x)}{v(x-t)} f(x-t) \right]_{t=0} \\ &= -\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{v'(x)}{v(x)} f(x) = -v(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v(x)} f(x) \right). \end{aligned}$$

Wenden wir insbesondere den hier geschriebenen Übergang auf diejenigen diskreten Systeme an, die wir in vorhergehenden Sektionen betrachtet haben. Dann lassen sich die entsprechenden kontinuierlichen Systeme so beschreiben:

$$\begin{aligned} \text{a) } v(x) &= e^{|x| \sin(\ln(1+|x|))} \\ (Hf)(x) &= -\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left( \sin(\ln(1+|x|)) + \frac{|x|}{1+|x|} \cos(\ln(1+|x|)) \right) \operatorname{sgn}(x) f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } v(x) &= e^{-|x|} \\ (Hf)(x) &= -\frac{\partial f(x)}{\partial x} - (\operatorname{sgn} x) f(x) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} v(x) &= \begin{cases} e^x & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & , \quad x > 0 \end{cases} \\ (Hf)(x) &= -\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \begin{cases} 1, x < 0 \\ -\frac{1}{x+1}, x > 0 \end{cases} f(x) \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Alle vorstehenden Beispiele von  $J$ -unitären Operatoren (symplektischen Automorphismen) sind durch Hilbertsche direkte Summen von gewichteten zweiseitigen Verschiebungsoperatoren realisiert.

Somit werden diese Operatoren unitär sein, wenn man den zugrundeliegenden Hilbertraum geeignet (aber unäquivalent!) renormiert.

*Also, die Operatoren sind ‘gut’ und hingegen sind die Räume ‘schlecht’.*

*Ich hoffe und glaube, daß dies typisch ist. Jetzt aber kann ich einige Sätze nur von solcher Art beweisen:*

1)  $\mathcal{H}$  sei ein linearer Raum, der ist mit einem inneren Produkt <sup>5</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , oder mit einer symplektischen bilinearen Form  $s(\cdot, \cdot)$  versehen. Ein linearer Operator  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -unitär (oder symplektisch). Nehmen wir an: es gibt ein Element  $u \in \mathcal{H}$ , so daß die Elemente  $\{T^N u\}_N$  ( $N = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) linear unabhängig sind.

Dann gibt es einen zweiseitigen gewichteten Verschiebungsoperator  $U : H_0 \rightarrow H_0$  und einen  $f \in H_0 \oplus H_0$ , so daß jeweils gilt:

$$\langle u, T^N u \rangle = (f, J\hat{U}^N f) \quad (N = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

oder

$$s(u, T^N u) = (f, \mathcal{J}\hat{U}^N f) \quad (N = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

2)  $T$  sei beliebiger invertierbarer Operator, angenommen aber, daß

$$S_0(T) = \{0\}, S_0(T^{*-1}) = \{0\}.$$

Dann ist  $T$  ein  $s$ -Limes von eine Folge von Operatoren, die zu unitären Operatoren ähnlich sind [Ch00].

---

<sup>5</sup>indefiniten oder definiten, das hat hier keine Bedeutung

## References

- [Arn] V.I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics.*  
( Matematičeskiye metody klassičeskoj mehaniki)  
(Russian) Moskva:Nauka, 1974.
- [Ber] F.A. BEREZIN, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.  
  
F.A. BEREZIN, *Methode der zweiten Quantelung. Zweite, neubearbeitete Auflage.* (Russian),  
(Metod vtoričnogo kvantovanija, 2-e izd.) M.: Nauka, 1986,
- [Bogn] J. BOGNÁR, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [Bog] N.N. BOGOLIUBOV, *Ausgewaehlte Werke in 3 Baenden. Band 2.*  
(Izbrannyje Trudy v 3 tomah. Tom 2.)  
(Russian) Kiev: Verlag'Naukova Dumka', 1970.  
N.N. BOGOLIUBOV, *Ausgewaehlte Werke in 3 Baenden. Band 3.*  
(Izbrannyje Trudy v 3 tomah. Tom 3.)  
(Russian) Kiev: Verlag'Naukova Dumka, 1971.
- [BraRob] O. BRATTELI AND D.W. ROBINSON, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. II, Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, 1981.
- [DadKul] L.A. DADAŠEV, V.JU. KULIEV, Diagonalization of bilinear Bose Hamiltonians and asymptotic behavior of corresponding Heisenberg fields. (Russian) *Teoret. Mat. Fiz.* **39**(1979), no3, 330–346. **MR 80e:81105**  
( Diagonalizacija bilinejnyh boze-gamil'tonianov i asimptotičeskoe povedenie poroždaemyh imi geizenbergovyh polej )  
//TMF.1979.**T.39**,N3,330-346.
- [DalKre] JU. L. DALETSKIJ, M. G. KREIN, *The Stability of the Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Moscow.: Nauka, 1970 (Russian)
- [DR] MICHAEL A. DRITSCHEL AND JAMES ROVNYAK, Operators on Indefinite Inner Product Spaces,  
  
in *Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994)*  
, Fields Institute Monographs, vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 141–232.  
  
This document is available via the web in two forms:  
<http://faraday.clas.virginia.edu/~jlr5m/papers/fields/fieldslectures.ps>  
postscript version ( 900K)  
[http://faraday.clas.virginia.edu/~jlr5m/papers/fields/dvi\\_version.html](http://faraday.clas.virginia.edu/~jlr5m/papers/fields/dvi_version.html)  
dvi version ( 450K)  
  
It has 91 pages, including bibliography and index. Supplementary materials and errata may be found at  
<http://faraday.clas.virginia.edu/~jlr5m/papers/fields/Supplement.ps>  
postscript version  
<http://faraday.clas.virginia.edu/~jlr5m/papers/fields/Supplement.dvi>  
dvi version  
  
The Abstract is available via the web in form:  
<http://www.math.purdue.edu/~mad/pubs/abs10.html>
- [Emch] G. G. EMCH, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

- [Fey] R.P. FEYNMAN, *Statistical Mechanics. A Set of Lectures*, W. A. Benjamin, Inc. Advanced Book Program Reading, Massachusetts 1972.
- [Ikr89] KH.D. IKRAMOV, The Theorem on the Diagonalization of One Kind of Hamiltonians from the Point of View of the Theory of Linear Operators in Indefinite Scalar Product  
// *Žurnal Vyčislitel'noj Matematiki i Matematičeskoj Fiziki*, 1989, **v. 29**, N 1, 3-14.
- [IK] I. S. IOKHVIDOV AND M. G. KREĬN, *Spectral theory of operators in spaces with indefinite metric. II*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **8** (1959), 413–496, English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) **34** (1963), 283–373. (**MR21:6543**)
- [IKL] I. S. IOKHVIDOV, M. G. KREĬN, AND H. LANGER, *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric*, Mathematical Research, vol. 9, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
- [Kul] KULIEV, V.JU. On the general theory of diagonalization of bilinear Hamiltonians. (Russian) **MR 82f:82014**  
*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **253**(1980), no. 4, 860–863.
- [KL1] M. G. KREĬN AND H. LANGER, *Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume  $\Pi_\kappa$* , Hilbert space operators and operator algebras (Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970), North-Holland, Amsterdam, 1972, pp. 353–399. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 5. (**MR54:11103**)
- [KL2] M. G. KREĬN AND H. LANGER, *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume  $\Pi_\kappa$  zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen*, Math. Nachr. **77** (1977), 187–236. **MR57:1173**
- [Kre64] M.G. KREIN, A New Application of the Fixed-Point Principle in the Theory of Operators in a Space with Indefinite Metric. //DAN SSSR. 1964. **154**, N 5, 1023 –1026.(russisch)
- [Kre65] M.G. KREIN, *Introduction to the geometry of indefinite  $J$ -spaces and to the theory of operators in those spaces*. In: Second mathematical summer school, Part 1, pp 15-92, Kiev.: Naukova dumka, 1965 (Russian)
- [Maj] W.A. MAJEWSKI, Does quantum chaos exist? (A quantum Lyapunov exponents approach.) // LANL E-Print, Paper: quant-ph/9805068 (<http://arXiv.org/abs/quant-ph/9805068>)
- [MV] J. MANUCEAU, A. VERBEURE, Quasi-free states of the CCR-algebra and Bogoliubov transformations, *Commun. Math. Phys.*, **9**, (1968), 293–302.
- [Oks] A.I. OKSAK, Non-Fock linear boson systems and their applications in two dimensional models. (Russian) *Teoret. Mat. Fiz.* **48** (1981),no. 3, 297-318. (**MR84i:81079**)  
Nefokovskie linejnye bozonnye sistemy i ih primenenija v dvumernyh modeljah  
//TMF.1981.**T.48**,N3,297-318.
- [RS1] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol 1 Functional analysis*, - N.Y.: Academic Press, 1972.
- [RS2] M. REED , B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol 2, Fourier analysis, Self-Adjointness*, - N.Y.: Academic Press, 1975.

- [RS3] M. REED, B. SIMON, *Scattering Theory*, Methods of Modern Mathematical Physics, vol 3, - N.Y.: Academic Press, 1979.
- [RS4] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol 4, Analysis of Operators*, - N.Y.: Academic Press, 1978.
- [Shk99] A.A. SHKALIKOV, On the Existence of Invariant Subspaces of Dissipative Operators in Space with Indefinite Metric.  
// Fundamental'naja i prikladnaja matematika, vol.5(1999), N5, pp.625–637.
- [Rob] D.W. ROBINSON, The ground state of the Bose gas,  
// Commun. Math. Phys., **1**, (1965), 159–171.
- [Will36] J. WILLIAMSON, On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems.  
// Amer. J. of Math. 1936, **V. 58**, 141-163.
- [Will37] J. WILLIAMSON, On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics.  
// Amer. J. of Math. 1937, **V. 59**, 599-617.



- [Ch81] S.A. CHOROŠAVIN, *On Krein spaces and \*-algebras.*  
O svjazi ponjatij teorii prostranstv Krejna i \*-algebr.  
// VINITI 27.04.81, Nr.1916–81 (Russian)
- [Ch83] S.A. CHOROŠAVIN, *On quadratic states on Weyl \*-algebra.*  
O kvadratičnyh sostojanijah na \*-algebre Vejlja .  
// VINITI 30.08.83, Nr.4823–83 (Russian)
- [Ch84] S.A. CHOROŠAVIN, *Quadratic majorants of sesquilinear forms and \*-representations.*  
Kvadratičnyje mažoranty polutoralinejnyh form i \*-predstavlenija.  
// VINITI 09.04.84, Nr.2135–84 (Russian) (Russian)
- [Ch84D] S.A. CHOROŠAVIN, *Linear Operators in Indefinite Inner Product Spaces and Quadratic Hamiltonians* (Russian) Ph.D. thesis, Voronezh state university, 1984
- [Ch89-1] S.A. CHOROŠAVIN, *Some theorems of non-trivial neutral invariant subspaces existence. Krein approximations terms.* Nekotorye teoremy sušestvovanija netrivial'nyh invariantnyh mažorant v terminah approksimacij Krejna  
  
//Kur. gos. ped. in-t. Kursk,1989.- 17 s. Bibliogr.:5 nazv.-  
//VINITI 21.03.89, Nr.1765 - V89 RŽMAT 1989 ,7B931 DEP (Russian)
- [Ch89-2] S.A. CHOROŠAVIN, *A case of non-trivial neutral invariant subspaces existence.* Odin priznak sušestvovanija nejtral'nogo invariantnogo podprostranstva  
  
//VINITI 06.07.89, Nr.4495 - V89 RŽMAT 1989 11B799 DEP (Russian)
- [Ch96T] Chorošavin S. A. *On convergence of angle operators for Krein approximations of J-unitary operator.*  
O shodimosti uglovyh operatorov, sootvetstvujuših approksimacijam Krejna J-unitarnogo operatora  
  
// Voronež. vesen. mat. šk. "Sovrem. metody v teorii kraev. zadač "Pontrjag. čtenija-7", 17-23 apr., 1996: Tez.dokl.-Voronež, 1996.- S.181. - Rus. RŽMAT 1996 11B824. (Russian)
- [Ch97T] S.A. CHOROŠAVIN, *A decomposition of linear bounded operators on Hilbert spaces.*  
Oдно razloženie linejnogo ograničennogo obratimogo operatora, dejstvujušego v gil'bertovom prostranstve /  
// "Pontrjag. čtenija-8" na Voronež. ves. mat. šk. "Sovrem. metody v teorii kraev. zadač", Voronež, 4-9maja, 1997 : Tez.dokl.-Voronež, 1997.- S.159. - Rus. RŽMAT 1997 10B706. (Russian)
- [Ch97] S.A. CHOROŠAVIN, *On one M. G. Krein problem.*  
//TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1997, v.1, N.2, 95-101. (Russian)
- [Ch98] S.A. CHOROŠAVIN, *An Example of J-Unitary U wich Has no Nonzero Invariant Subspace L such that  $r(U|L) \leq 1$ .* //TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC. 1998. v.2, N 2, 97–103 (Russian)
- [Ch00] S.A. CHOROŠAVIN, *A Nonlinear Approximation of Operator Equation  $V^*QV = Q$  : Nonspectral Decomposition of Nonnormal Operator and Theory of Stability* // LANL E-print, Paper: math.DS/0005117

(<http://arXiv.org/abs/math/0005117>)  
oder auch // mp\_arc, Paper: 00-221 ([http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc-bin/mpa?yn=00-221](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=00-221), [http://mpej.unige.ch/mp\\_arc-bin/mpa?yn=00-221](http://mpej.unige.ch/mp_arc-bin/mpa?yn=00-221),  
[http://www.maia.ub.es/mp\\_arc-bin/mpa?yn=00-221](http://www.maia.ub.es/mp_arc-bin/mpa?yn=00-221) )